TAM SAYILI DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

- ✓ **Tamsayılı Doğrusal Programlama**: Bir doğrusal programlama modelinde en az bir karar değişkeni tamsayı olarak kısıtlanmış doğrusal programlama modelleridir. Tamsayılı doğrusal programlama modelleri şunlardır: Arı tamsayılı doğrusal programlama modeli, karma tamsayılı doğrusal programlama modeli, ikili (0-1) tamsayılı doğrusal programlama modeli ve karma ikili tamsayılı programlama modeli.
- ✓ Tüm karar değişkenleri tamsayılı olarak kısıtlanmış doğrusal programlama modellerine ***arı tamsayılı doğrusal programlama modelleri*** adı verilmektedir.
- ✓ Tüm karar değişkenleri tamsayılı olarak kısıtlanmamış doğrusal programlama modellerine ***karma tamsayılı doğrusal programlama modelleri*** adı verilmektedir.
- ✓ Tüm karar değişkenleri 0 veya 1 olarak kısıtlanmış doğrusal programlama modellerine ***ikili (0-1) tamsayılı doğrusal programlama modelleri*** adı verilmektedir.
- ✓ Bazı değişkenleri 0 veya 1 değerlerini alırken, diğer değişkenleri sürekli değerleri alabilen modellere ***ikili karma tamsayılı doğrusal modelleri*** adı verilmektedir. Uygulamada, bu tür modellere örnek olarak, bazı ürünlerin hangi makinelerde üretilmesinin seçimi ile bu makinelerde söz konusu ürünlerden ne kadar üretileceğine ilişkin problemler örnek olarak verilebilir.

- ✓ Tamsayılı doğrusal programlama modellerinin çözümlenmesinde ***gevşetilmiş doğrusal programlama modelinin*** çözümü önem taşımaktadır. Gevşetilmiş doğrusal programlama modeli, doğrusal programlama modelinin karar değişkenleri üzerindeki tüm tamsayı ve ikili (0 veya 1) değişken kısıtları göz ardı edilerek tanımlanan doğrusal programlama modelidir. Diğer bir anlatımla gevşetilmiş doğrusal programlama modellerinin çözümü, tüm karar değişkenlerinin sürekli olduğu varsayılarak elde edilen çözümü ifade etmektedir.
- ✓ Bir tamsayılı doğrusal programlama modelinin gevşetilmiş modeli, tamsayılı modele göre daha az kısıtlanmış bir şeklidir. Bu nedenle tamsayılı doğrusal programlama modelinin uygun çözüm alanı, gevşetilmiş modelin uygun çözüm alanının içinde yer almasını zorunlu kılmaktadır. Fakat buna rağmen tamsayılı bir DP modelinin çözümü her zaman gevşetilmiş modelin çözümünden genellikle daha zordur.
- ✓ Tamsayılı doğrusal modellerin çözümünün, normal gevşetilmiş modelin optimum çözüm değerlerini tamsayıya yuvarlayarak elde edilebileceği düşünülebilir. Fakat gevşetilmiş DP modelleriyle elde edilen sonuçları tam sayıya yuvarlamak uygun olmayan (infisible) çözümlere veya uygun fakat optimal olmayan tamsayılı çözümler elde edilebilir.

Arı, Karma ve İkili Tamsayılı DP Modellerinin Gevşetilmiş Modeli:

Maksimum $Z = 6X1 + 5X2 + 2X3$

Kısıtlar:

$10X1 + 4X2 + X3 \leq 600$

$2X1 + 5X2 + 2X3 \leq 800$

$X1, X2, X3 = 0$ veya 1.

Optimum Çözüm: $X1 = 1;\ X2 = 1;\ X3 = 1$ ve $Z = 13$'tür.

Maksimum $Z = 6X1 + 5X2 + 2X3$

Kısıtlar:

$10X1 + 4X2 + X3 \leq 600$

$2X1 + 5X2 + 2X3 \leq 800$

$X1, X2, X3 \geq 0.$

Optimum Çözüm: $X1 = 22,2;\ X2 = 0$ ve $X3 = 377,8$ ve $Z = 888,9$'dur.

- ✓ Tamsayılı modellere aşağıdaki gibi birkaç örnek verilebilir:
- ✓ *n* sayıda projeden en fazla *k* sayıda proje tamamlanacaktır: $\sum_{j=1}^{n} X_j \leq k.$
- ✓ *J*. ve *i*. model aynı anda uygulanamaz (iki projeden sadece birisi uygulanabilir): $X_j + X_i \leq 1.$
- ✓ *J*. ve *i*. projeler aynı (eşzamanlı) yürütülmelidir: $X_j - X_i \leq 0.$
- ✓ Arı tamsayılı DP modelinin sonlu sayıda çözümü ve sınırlı uygun çözümü olan modeller için uygulanabilir.
- ✓ *p*-sayıda karar değişkenli ikili bir DP modelinin 2^p sayıda olası çözümü vardır. Kara değişkeni sayısı *p=10, p=20* ve *p=30* ise olası çözüm sayıları sırasıyla 1.024, 1.048.576 ve 1.073.741.824'tür. Tüm olası çözümlerin denenerek en uygun olan çözümün bulunmasında günümüz bilgisayarları bile yetersiz kalabilmektedir. Yazında 1000 karar değişkenli tamsayılı DP modellerinin «yeni geliştirilen algoritmalarla» çözümlenebileceğini öğreniyoruz. Hatta ***Dal ve Sınır Algoritması*** ile 1991 yılında Karla Hoffman ve Manfred Padberg makalelerinde 6000 karar değişkenli modellerin çözümlenebildiği açıklamışlardır.
- ✓ Tamsayılı DP modellerinin çözümünü güçleştiren iki parametre söz konusudur: Bunlar DP modelindeki tamsayılı değişken sayısı ile kısıt sayısıdır.

- ***Duyarlılık Analizleri***: Tamsayılı DP modellerinde duyarlılık analizleri, normal DP modellerindeki duyarlılık analizleri ile aynı anlama gelmez. Daha açık bir anlatımla tamsayılı DP modellerinde duyarlılık analizleri tamamen göz ardı edilmesi gerekir veya büyük bir ihtiyatla kullanılmalıdır. Gerçekten tamsayılı DP modelinin katsayılarında yapılan küçük değişiklikler, modelin optimum çözümünde çok büyük değişikliklere neden olmakta veya uygun olmayan çözümlere yol açmaktadır.

- ***Dal ve Sınır Algoritması***: Bu algoritmayla modelin optimum çözümü araştırılırken, problemin tüm aşamaları sistemli bir şekilde analiz edilir. Öncelikle tüm olası çözümler, daha küçük alt çözüm kümelerine ayrıştırılır ve her bir alt çözüm kümesi için alt sınır (AS) ve üst sınır (ÜS) değerleri belirlenir. Daha sonra bu değerlerden yararlanarak bazı problemler elenerek optimum çözüme daha hızlı bir şekilde ulaşılır. Bu aşamalarda üç temel adım uygulanmaktadır: Dallandırma (branching), sınırlandırma (bounding) ve düğümlemedir (fathomed).

Tamsayılı DP Modeli ve Dal ve Sınır Algoritmasının Aşamaları

Aşağıdaki algoritma maksimizasyon problemleri içindir. Minimizasyon problemleri için alt sınır ve üst sınır değerleri birbiriyle değiştirilir.

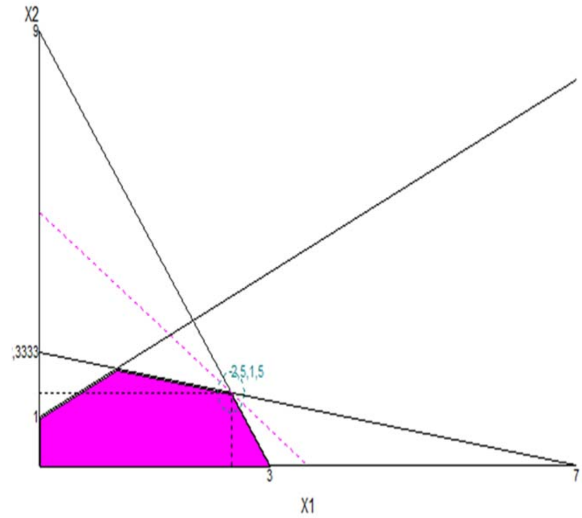
- **ADIM 1:** Özgün DP probleminin gevşetilmiş DP modeli çözülür. Optimum çözüm tüm tamsayı kısıtlarını sağlıyorsa optimum çözüme ulaşılmış olur. Böylece algoritma sonlandırılır. Aksi durumda optimum çözüm değeri üst sınır (ÜS) değeri olarak alınır. Bu çözümü gösteren bir başlangıç düğümü tanımlanır.
- **ADIM 2:** Optimum çözümde tamsayılı olarak kısıtlanmış değişkenlerin değerleri alt tamsayı değerlerine yuvarlatılarak (örneğin *X1*=4,89 ise *X1*=4 ve *X3*=2,3 ise *X3*=2 alınır) amaç fonksiyonunun değeri hesaplanır ve bu değer problemin başlangıç alt sınır değeri (AS) olarak alınır. Başlangıç alt sınır değeri hesaplanamazsa alt sınır değeri -∞ olarak alınır (AS=-∞).
- **ADIM 3:** Birinci Adımda maksimum Z değerini sağlayan en büyük tamsayı olmayan değişkenden başlanarak aşağıdaki gibi iki kısıt modele eklenerek ikili bir dallandırma yapılır:

$$X_j \le \left[x_j \right]$$
$$X_j \le \left[x_j \right] + 1$$

Burada x_j; tamsayı olmayan karar değişkeninin optimum çözüm değerinin tamsayı kısmını göstermektedir.

- **ADIM 4: Adım 3**’te tanımlanan alt problemlerin gevşetilmiş DP modellerin çözümleri elde edilir. Daha sonra özgün DP modelinin gevşetilmiş çözümü ile bu alt problemlerin gevşetilmiş çözümleri iki alt düğümde dallandırılarak gösterilir.
- **ADIM 5: Adım 4**’teki alt düğümlerde gösterilen her iki alt problemin çözüm değerleri:
  a) Düğümdeki alt problemin uygun olmayan çözümü var ise bu düğümdeki dallandırma düğümlenir yani sona erdirilir.
  b) Düğümdeki alt problemin çözümü uygun fakat tamsayılı çözüm yok ise **Adım 6**’ya gidilir.
  c) Düğümdeki alt problemin çözümü uygun ve tamsayılı bir çözüm ise amaç fonksiyonunun değeri (Z) incelenir. Bu değer (Z), üst sınır değerine eşitse (ÜS=Z) optimum çözüme ulaşılmıştır. Eğer Z değeri ÜS ile AS değerleri arasında ise bu değeri (Z) alt sınır (AS) değeri kabul ederek **Adım 6**’ya gidilir. Eğer alt problemin Z değeri alt sınır (AS) değerinden küçük ise bu düğüm düğümlenir yani sona erdirilir.
- **ADIM 6:** Her iki alt problemden tamsayılı olmayan yeni dallandırmalar için **Adım 3**’e gidilir. Ayrıca alt problemlerin son düğümlerindeki amaç fonksiyonlarının değerleri, problemin yapısına göre en büyüğü veya en küçüğü (minimizasyon problemi için) üst sınır değeri olarak alınır. Üst sınır değeri alt sınır değerine eşitse (ÜS=AS) algoritma sona erdirilir. Aksi halde **Adım 3**’e geri dönülür. Ayrıca son dallandırmadaki alt problemlerin düğümleri incelenerek değeri en büyük veya en küçüğü (minimizasyon problemi için) optimal çözüm olur.
- Görüldüğü gibi el ile yukarıdaki algoritma kullanılarak DP modellerini çözmek oldukça zordur. Bu amaçla çok değişkenli ve çok kısıtlı tamsayılı DP modellerinin çözümünde QM gibi paket programları kullanılır.

(1) Arı Tamsayılı DP Problemlerinin Dal ve Sınır Algoritması ile Çözümü



$$\text{Maksimum } Z = 3X1 + 2X2$$

Kısıtlar:

$$3X1 + X2 \le 9$$
$$X1 + 3X2 \le 7$$
$$-X1 + X2 \le 1$$
$$X1, X2 \ge 0 \text{ ve Tamsayı.}$$

X1	X2	Z
0	0	0
3	0	9
0	1	2
2,5	**1,5**	**10,5** Optimal Çözüm
1	2	7

(a) Tamsayı kısıtını dikkate almadan yukarıdaki DP problemini çözünüz ve *X1* ve *X2* sürekli (kesirli değerler alabilen) değişkenler olduğunu gösteriniz?

- 3*X1*+2*X2*<=9 için: X1=0 ise X2=9 olur. A(0; 9). X2=0 ise X1=3 olur. B(3; 0).
- *X1*+3*X2*<=7 için: X1=0 ise X2=2,33 olur. C(0; 2,33). X2=0 ise X1=7 olur. D(7; 0).
- -*X1*+*X2*<=1 için: X1=0 ise X2=1 olur. E(0; 1). X2=4 ise X1=3 olur. F(3; 4).

✓ Bu verilere göre grafik yöntemle elde edilen çözüm bir önceki sayfada verilmektedir.

(b) Yukarıda elde edilen çözümün değerlerini üst tamsayı değerlerine yuvarlatılarak elde edilecek amaç fonksiyonu değerinin uygun bir çözüm olmadığını gösteriniz.

- *X1*=3, *X2*=2 ve *A*(3; 2) noktası (Z=13) uygun olmayan çözüm bölgesine düşmektedir.

(c) Optimum çözüm değerlerini alt tamsayı değerlerine yuvarlatılarak elde edilecek amaç fonksiyonu değerinin uygun bir çözüm olduğunu gösteriniz.

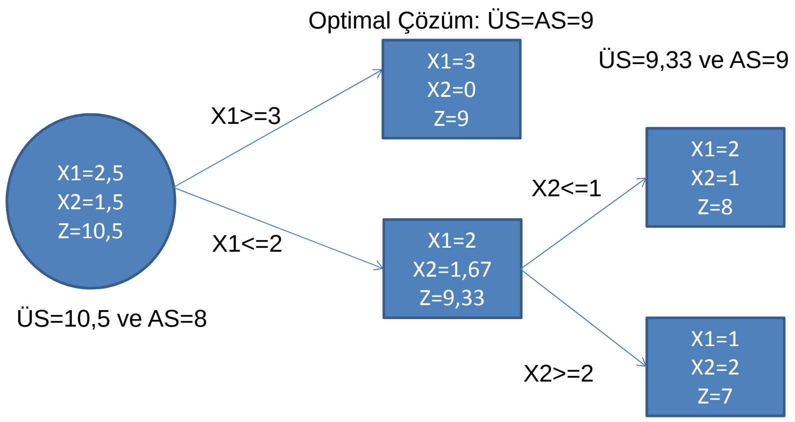
- *X1*=2 , *X2*=1 ve *A*(2; 1) noktası (Z=8) uygun olan çözüm bölgesine düşmektedir.

(d) X1 ve X2 için olası tamsayı noktalarını örneklendirerek c şıkkında elde edilen sonucun optimal olmadığını gösteriniz. Optimal tamsayılı DP çözümün, çözüm değerlerinin tamsayı değerlerine yuvarlatılarak elde edilemeyeceğini gösteriniz.

SN	X1	X2	Z	
1	0	0	0	
2	1	0	3	
3	2	0	6	
4	3	0	9	***Optimum Tamsayılı Çözüm
5	0	1	2	
6	1	1	5	
7	2	1	8	***C Şıkkında Elde Edilen Çözüm
8	1	2	7	

(e) Dal ve Sınır Algoritması ile Yukarıdaki Tamsayılı DP Problemini Çözerek d Şıkkında Elde Edilen Çözümle Aynı Olduğunu Gösteriniz.

ADIM 1: Gevşetilmiş DP Probleminin Optimum Çözümü X1=2,5; X2=1,5 ve Z=10,5. Başlangıç ÜS=10,5. 1=2; X2=1 ve Z=8 Başlangıç AS=8 alınır.



(2) Karma Tamsayılı DP Problemlerinin Dal ve Sınır Algoritması ile Çözümü

(3) İkili (0-1)Tamsayılı DP Problemlerinin Dal ve Sınır Algoritması ile Çözümü

ARI TAM SAYILI DOĞRUSAL PRGRAMLAMA PROBLEMİ VE QM ÇÖZÜMÜ-1

Bir işletmede tüm işlerin yapılabilmesi için haftanın yedi gününde aşağıda belirtilen sayılarda işçilerin çalışması gerekmektedir. Her işçi haftada ardışık 5 gün çalışıp ardışık 2 gün tatil yapmaktadır. Çalıştırılması gereken minimum işçi sayısını bulan doğrusal programlama modelini kurunuz ve problemi çözünüz?

Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar
20	20	22	22	30	15	10

ÇÖZÜM:

Doğrusal Programlama Modeli:

Not: $X_i = i$. günde işe başlayan işçi sayısını göstermektedir. Ayrıca X_i = bir tamsayıdır. Model için en uygun çözüm tekniği, tamsayılı doğrusal programlamadır.

Min Z= $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7$

Kısıtlar:

Pazartesi : $X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_1 >= 20$

Salı : $X_5 + X_6 + X_7 + X_1 + X_2 >= 20$

Çarşamba : $X_6 + X_7 + X_1 + X_2 + X_3 >= 22$

Perşembe : $X_7 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 >= 22$

Cuma : $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 >= 30$

Cumartesi : $X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 >= 15$

Pazar : $X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 >= 10$

OPTİMUM ÇÖZÜM:

Tablo 3: Arı Tamsayılı DP Modelinin Optimum Çözüm Tablosu

Değişken	Çözüm Değeri
X_1	15
X_2	5
X_3	2
X_4	0
X_5	8
X_6	0
X_7	0
Çözüm Değeri	30

Tablo 2: QM Arı Tamsayılı Doğrusal Programlama Modeli

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Kısıt	Çözüm
Minimum	1	1	1	1	1	1	1	Tipi	Vektörü
Pazartesi	1	0	0	1	1	1	1	>=	20
Salı	1	1	0	0	1	1	1	>=	20
Çarşamba	1	1	1	0	0	1	1	>=	22
Perşembe	1	1	1	1	0	0	1	>=	22
Cuma	1	1	1	1	1	0	0	>=	30
Cumartesi	0	1	1	1	1	1	0	>=	15
Pazar	0	0	1	1	1	1	1	>=	10
Çözüm	15	5	2	0	8	0	0	Optimum Z	30

Tablo 3: Arı Tamsayılı DP Modelinin Optimum Çözüm

Yineleme	Düzey	Kısıt Ekleme	Çözüm Tipi	Çözüm Değeri	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
			Optimum	30	15	5	2	0	8	0	0
1	0		TAMSAYI	30	15	5	2	0	8	0	0

ARI TAM SAYILI DOĞRUSAL PRGRAMLAMA PROBLEMİ VE QM ÇÖZÜMÜ-2

Problem 1'i işletmede her çalışan haftada ardışık 6 gün çalışıp 1 gün tatil yapması durumunda çalıştırılması gereken minimum işçi sayısını bulan doğrusal programlama modelini kurunuz?

Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar
20	20	22	22	30	15	10

ÇÖZÜM:

Arı Tamsayılı Doğrusal Programlama Modeli:

Minimum $Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7$

Kısıtlar:

Pazartesi	: $X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_1 >= 20$
Salı	: $X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_1 + X_2 >= 20$
Çarşamba	: $X_5 + X_6 + X_7 + X_1 + X_2 + X_3 >= 22$
Perşembe	: $X_6 + X_7 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 >= 22$
Cuma	: $X_7 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 >= 30$
Cumartesi	: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 >= 15$
Pazar	: $X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 >= 10$

OPTİMUM ÇÖZÜM:

Tablo 4: Arı Tamsayılı DP Modelinin Optimum Çözüm Tablosu

Değişken	Çözüm Değeri
X_1	20
X_2	0
X_3	0
X_4	8
X_5	0
X_6	0
X_7	2
Çözüm Değeri	30

Tablo 5: QM Arı Tamsayılı Doğrusal Programlama Modeli

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Kısıt Tipi	Çözüm Vektörü
Minimum	1	1	1	1	1	1	1		
Pazartesi	1	0	1	1	1	1	1	>=	20
Salı	1	1	0	1	1	1	1	>=	20
Çarşamba	1	1	1	0	1	1	1	>=	22
Perşembe	1	1	1	1	0	1	1	>=	22
Cuma	1	1	1	1	1	0	1	>=	30
Cumartesi	1	1	1	1	1	1	0	>=	15
Pazar	0	1	1	1	1	1	1	>=	10
Çözüm	20	0	0	8	0	0	2	Optimum *Z*	30

Tablo 6: Arı Tamsayılı DP Modelinin Optimum Çözüm

Yineleme	Düzey	Kısıt Ekleme	Çözüm Tipi	Çözüm Değeri	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
			Optimum	30	20	0	0	8	0	0	2
1	0		TAMSAYI	30	20	0	0	8	0	0	2